

Aplicación del Método de Montecarlo para el cálculo de integrales definidas

López, María Victoria y Mariño, Sonia Itatí

Departamento de Informática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Universidad Nacional del Nordeste

9 de Julio n° 1449. CP: 3400. Corrientes. Argentina

TE (03783) 423126/423968/424606 - Fax (03783) 423968

mvlopez@exa.unne.edu.ar; msonia@exa.unne.edu.ar

Resumen:

En este trabajo se presenta un software educativo, desarrollado en *Mathematica*, para el cálculo de integrales definidas mediante el Método de Simulación o de Montecarlo.

El programa realiza llamadas a un paquete en *Mathematica* que lleva a cabo la generación de los números aleatorios.

Mediante el uso del software desarrollado los alumnos podrían adquirir habilidad y destreza en el manejo de modelos de simulación computarizados y afianzar los conceptos teóricos sobre simulación de sistemas adquiridos en el aula.

Palabras clave: Método de Simulación o de Montecarlo. Mathematica. Aprendizaje asistido por computadora. Software educativo.

Introducción

Muchos problemas que se presentan en la práctica, carecen de solución dentro del campo analítico, es decir, de la matemática pura.

En este trabajo se considera el problema particular que consiste en el cálculo del valor de una integral definida. La imposibilidad o inconveniencia de la aplicación de los métodos tradicionales para la solución de este problema está dada, fundamentalmente, por las siguientes causas:

- Que no se conozca ninguna función primitiva de aquella que se desea integrar.
- Que aún conociéndose una función primitiva, resulte excesivamente compleja o extensa su aplicación.

Esto fundamenta el estudio de métodos más o menos precisos, no tradicionales, fundamentalmente numéricos, que permiten el cálculo de integrales definidas. Para resolver el problema, resulta necesaria una aproximación a una expresión del tipo

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

que resulte comprensible por la computadora, mediante algún método numérico. Es posible realizarlo de muchas maneras diferentes (fórmula de los Trapecios, fórmula de Simpson, etc.) [Pace94].

En este trabajo se emplea el **método de simulación o de Montecarlo**. La simulación consiste en iterar un proceso lógico, expresado en términos de ecuaciones matemáticas y operaciones lógicas, constitutivas de algún modelo matemático cuyos coeficientes son parámetros que varían según un criterio determinado. La estructura iterativa o el carácter combinatorio de la simulación lo da la sistemática variación de sus parámetros en cada paso o iteración, cosa que se puede realizar haciendo intervenir al azar, o no, según el tipo de fenómeno que se trata de simular y el modelo utilizado para describirlo. Cuando al menos una de las variables que intervienen en el modelo es de tipo aleatorio, se estará en presencia de una simulación estocástica, en caso contrario, cuando todas las variables que intervienen en el modelo son deterministas, será una simulación determinista. En este trabajo se emplea la simulación determinista.

Para llevar a cabo este proceso de simulación, en la práctica generalmente se requieren sucesiones de números aleatorios. Reciben el nombre de números aleatorios o números al azar todas aquellas sucesiones de dígitos equiprobables, entre el cero y el nueve, ubicados aleatoriamente en toda su extensión [Pace95]. Uno de los requisitos principales que se imponen sobre las sucesiones obtenidas mediante procesos aleatorios de muestreo es la independencia estadística [Freund]. Se requiere disponer de un medio eficaz para generar los números aleatorios o al azar, a medida que son necesitados por el modelo matemático que representa el sistema [Pace95].

Este trabajo tiene como objetivo la aplicación del Método de Simulación o de Montecarlo para el cálculo de integrales definidas. Para ello, se ha desarrollado en lenguaje *Mathematica* un paquete que permite calcular la integral definida de cualquier función dada. El programa realiza llamadas a otros subprogramas que llevan a cabo la generación de los números aleatorios.

La simulación permite en algunos casos el experimentar situaciones, del tipo qué pasa si..., donde se ensayan las hipótesis y aparece el resultado [Rivera]. Finalmente, resulta interesante el desarrollo de un sistema que permita acceder a los alumnos a técnicas complejas desde el punto de vista numérico, como el método de Montecarlo.

Metodología

El lenguaje de programación empleado es *Mathematica* [Castillo]. Se empleó un paquete propio de este programa para realizar las representaciones gráficas. Para la generación de los números aleatorios se accedió a un paquete [López] [Pace99] desarrollado en *Mathematica* que incluye el

Método de los Cuadrados Centrales de Vonm Neumann [Pardo], Método de Fibonacci [Pace95], Método Aditivo de Congruencias [Pardo], Método Multiplicativo de Congruencias [Coos], Método Mixto de Congruencias [Coos].

La metodología llevada a cabo para el cálculo de las integrales mediante el Método de Montecarlo consiste en:

1. Desarrollar un procedimiento para la generación de números aleatorios. En este caso se utiliza alguno de los procedimientos del paquete en *Mathematica* mencionado.
2. Inscribir la superficie encerrada entre la curva, el eje de las abscisas y las ordenadas extremas a y b, en un rectángulo determinado por la base (b-a) y la altura (d-c).
3. Ejecutar el procedimiento de generación de números aleatorios dos veces. Una de ellas para generar los números comprendidos en un intervalo para las “x” [a,b] y una segunda vez para generar los números comprendidos en un intervalo para las “y” [c,d]. Estos números son considerados de a pares ordenados y todos caen dentro del rectángulo considerado.
4. Determinar el valor de S, que indica la cantidad de puntos que caen dentro de la superficie determinada por la integral, contando los pares ordenados (x, y) que cumplen las condiciones establecidas.
5. Al finalizar las n iteraciones del proceso, calcular el valor de la integral de la siguiente manera:

$$\frac{Area}{(b-a)*(d-c)} = \frac{S}{N} \Rightarrow Area = \frac{S*(b-a)*(d-c)}{N}$$

donde:

N = Cantidad de puntos generados dentro del rectángulo.

S = Cantidad de puntos que caen dentro de la superficie correspondiente a la integral.

Resultados

Se ha desarrollado un programa en *Mathematica* para el cálculo de integrales por el Método de Simulación. Este programa permite al usuario estimar el valor de la integral definida de una función dada como argumento, en un intervalo numérico también proporcionado como argumento, para los casos siguientes:

- la función toma valores positivos (Figura 1)
- la función toma valores negativos
- la función toma valores positivos y negativos (Figura 2)

El procedimiento en *Mathematica* requiere el ingreso de los siguientes parámetros para su ejecución:

n: número de las iteraciones de la simulación a realizar.

num: número semilla para inicializar el generador de números aleatorios.

n1: extremo inferior del intervalo de integración.

n2: extremo superior del intervalo de integración.

f: expresión de la función a integrar.

x: variable de integración.

Luego de sucesivas ejecuciones del procedimiento, se observó el valor de la superficie es más preciso, a medida que aumenta el número de iteraciones del proceso de simulación. En las Figuras 1 y 2 se muestran el comando que invoca al programa y los resultados obtenidos, para dos funciones ejemplo.

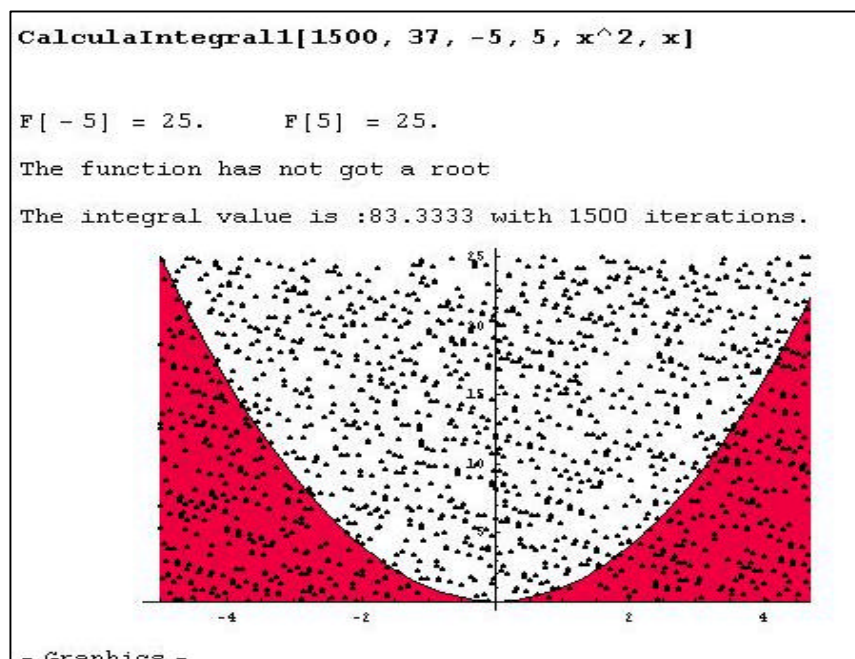


Figura 1.- Resultados obtenidos en la ejecución del programa CalculaIntegral, para la función $y=x^2$, con 1500 iteraciones

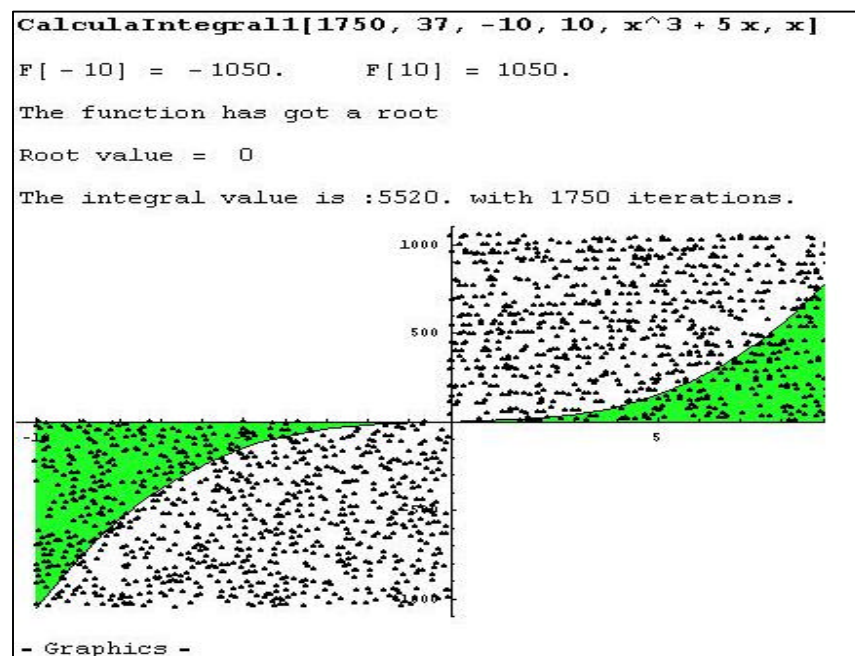


Figura 2.- Resultados obtenidos en la ejecución del programa CalculaIntegral, para la función $y=x^3+5x$, con 1750 iteraciones

Conclusiones:

En este trabajo se presenta un software educativo, desarrollado en *Mathematica*, para el cálculo de integrales definidas mediante el Método de Simulación o de Montecarlo. El mismo permite comprobar la eficiencia del Método de Simulación en la resolución de problemas de este tipo. Se observa que con *Mathematica* es posible desarrollar los procedimientos de una manera sencilla,

disminuyendo las líneas de código, los tiempos de desarrollo, eliminando instrucciones repetitivas, empleando instrucciones específicas y obteniendo una buena calidad en las representaciones gráficas con muy pocos comandos. Se concluye en que las capacidades computacionales y gráficas de *Mathematica* lo convierten en una herramienta excelente para el desarrollo de simulaciones y su implementación con fines pedagógicos.

Se tiene pensado crear en el futuro el sitio Web de la asignatura “Modelos y Simulación” de la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información de la Fac. de Cs. Exactas y Nat. y Agrimensura (UNNE). Desde esta página Web los alumnos podrán acceder a los contenidos teóricos de la materia, a las guías de trabajos prácticos, y a series de problemas complementarios. Asimismo, podrán establecer contacto con los docentes de la cátedra, realizar consultas, etc. El software desarrollado en este trabajo podría descargarse desde este sitio y mediante su utilización los alumnos podrían verse incentivados a:

- Adquirir habilidad y destreza en el manejo de modelos de simulación computarizados.
- Efectuar todos los pasos del procesamiento de modelos matemáticos mediante la simulación, no limitándose a la primera etapa de simple construcción de diagramas de flujo de los algoritmos correspondientes a los ejercicios prácticos. De esta manera se enfrentarán a dificultades tales como la selección de los parámetros iniciales, la ejecución de las corridas y el posterior análisis de los datos simulados.
- Afianzar los conceptos teóricos y técnicas utilizados en la simulación de sistemas, adquiridos en el aula.

Bibliografía:

- [Castillo] Castillo, E., Iglesias, A., Gutiérrez, J. M., Álvarez, E. y Cobo, A. 1996. “Mathematica”. Ed. Paraninfo. Madrid, España. 3ra. Ed. 534pp.
- [Coos] Coos, R. 1992. “Simulación un enfoque práctico”. Limusa Grupo Noriega Editores. México. 157 pp.
- [Freund] Freund, J. E. 1962. “Mathematical Statistics”. Englewood Cliffs. Prentice-Hall.
- [López] López, María V., Mariño, Sonia I. y Petris, Raquel H. 1999. “Un análisis comparativo de generadores de números pseudo-aleatorios en Mathematica 3.0”. FACENA. Revista de la Facultad de Cs. Exactas y Nat. y Agrimensura. Univ. Nac. del Nordeste. Vol.15. Corrientes. Argentina.
- [Pace94] Pace, G. J. 1994. Métodos Numéricos. Editorial Universitaria de la Universidad Nacional del Nordeste. 310 pp.
- [Pace95] Pace, G. J. 1995. Material didáctico de la Cátedra “Modelos y Simulación”. FACENA. UNNE. Inédito. Corrientes. Argentina.
- [Pace99] Pace, G. J., López, María V., Mariño, Sonia I. y Petris, Raquel H. 1999. “Programación de un paquete de simulación con Mathematica”. Reunión de Comunicaciones Científicas y Tecnológicas. UNNE. Corrientes. Argentina. Tomo VIII. Cs. Exactas. 8:9-12.
- [Pardo] Pardo, L. y Valdés, T. 1987. “Simulación. Aplicación práctica en la empresa”. Ed. Díaz de Santos S. A. Madrid. España. 293 pp.
- [Rivera] Rivera Porto, E. “Aprendizaje asistido por computadora. Diseño y realización”. <http://msip.lce.org/erporto/libros/edu2>.